

# Mathematische Aktivitäten rund um die Leonardo-Brücke

Hans HUMENBERGER, Universität Wien<sup>1</sup>

Die Leonardo-Brücke ist ein relativ bekanntes Phänomen: *Leonardo da Vinci* war ihr Erfinder und Namensgeber. Es steckt sehr viel elementare Mathematik in ihr, man muss sie nur entdecken. Man kann damit ein konkretes historisches Phänomen, dessen Modell auch im Mathematikunterricht leicht nachgebaut werden kann (und soll!), zum Anlass nehmen, substanzielle Mathematik zu *betreiben*, d. h. Mathematik als *Prozess*. Dieser Beitrag soll für verschiedene Klassenstufen einige Möglichkeiten aufzeigen. Außerdem wird eine kurze fachdidaktische Reflexion gegeben.

## 1 Einleitung

Leonardo da Vinci (1452 – 1519) war ein besonders vielseitig begabter Mensch. Unvergessen ist sein Ruf sowohl als Maler als auch als Bildhauer, Architekt, Musiker, Mechaniker, Ingenieur und Naturphilosoph. Er war nicht nur der Schöpfer der millionenfach bestaunten „Mona Lisa“ (Louvre, Paris), sondern auch Erfinder zahlreicher technischer Apparate, insbesondere die ersten „Fluggeräte“ sind vielen Menschen bekannt.



Abb. 1: L. da Vinci

Er hat u. a. auch eine genial einfache Brücke entworfen. Es handelt sich dabei um ein konkretes Phänomen, das es historisch wirklich gegeben hat, das man auch selbst sehr leicht basteln kann und auch unbedingt soll, erst dann kann diese Brücke ihre Faszination zeigen.

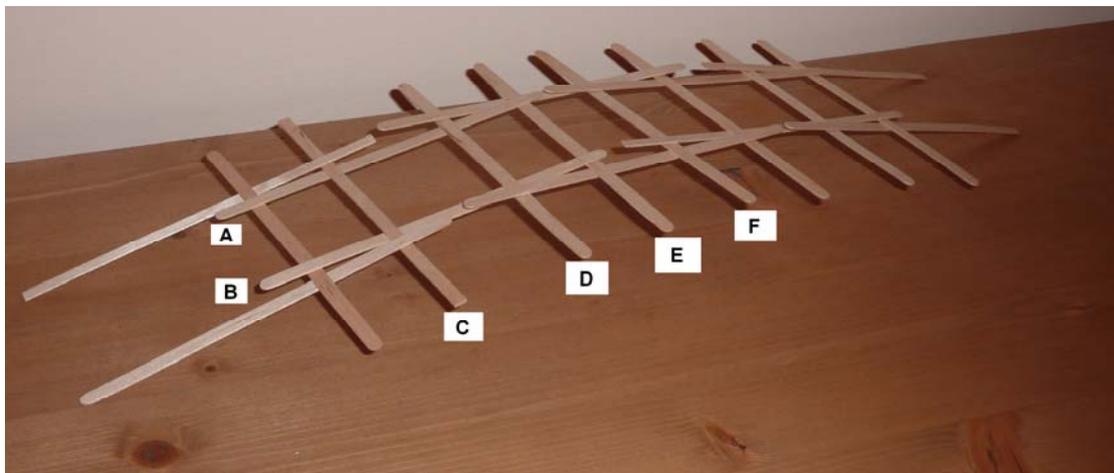


Abb. 2: Leonardobrücke aus kleinen Hölzchen

Sowohl in der sehr bekannten Wanderausstellung „Mathematik zum Anfassen“ (in der Vergangenheit an vielen Orten zu erleben, z. B. im Herbst 2001 in Wien im Rahmen der kombinierten ÖMG-DMV-Tagung an der Universität Wien) als auch am mittlerweile fixen Ort („Mathematikum“, Gießen) hat Prof. Beutelspacher mit seinen Mitarbeitern dieses Objekt vielen Schülerinnen und Schülern gezeigt und somit näher gebracht: Man konnte und sollte Modelle dieser Brücke selbst bauen. Schüler/innen und Erwachsene haben mit viel Begeisterung an den Modellen gearbeitet.

Es steckt sehr viel elementare Mathematik in ihr, die förmlich darauf wartet, entdeckt zu werden! Schüler/innen werden diese wahrscheinlich nicht ganz von selbst suchen<sup>2</sup>, aber mit anregenden und interessanten Fragestellungen durch Lehrkräfte ist dieses Thema eine gute Gelegenheit für: Ein

<sup>1</sup> Dieser Aufsatz ist ursprünglich erschienen in: *Der Mathematikunterricht* 57 (2011), 4, 34 – 54.

<sup>2</sup> Auch die Ausstellung von Prof. Beutelspacher bot dazu keine Anregungen bzw. Aufforderungen.

konkretes *Phänomen* zum Anlass nehmen, um substanzielle Mathematik zu *betreiben* (Prozess!), nicht nur von der Lehrperson vorgetragen als „Stoff“. Dies ist gemeint im Sinne von „Rettet die Phänomene!“ (vgl. WAGENSCHNEIDER 1977 und WITTMANN 2001).

Leonardo da Vinci plante und konstruierte 1483 eine sehr leichte und leicht zu transportierende bogenförmige Brücke. Er wandte sich 1483 mit den Zeilen

*„Ich habe eine Anleitung zur Konstruktion sehr leichter und transportabler Brücken, mit denen der Feind verfolgt und in die Flucht geschlagen werden kann.“*

als „Bewerbung“ um eine Stelle an den Hof von Ludovico da Sforza in Mailand.

Diese besteht aus relativ kurzen Balken bzw. Brettern und benötigt in manchen Versionen keinerlei andere Hilfsmittel wie Nägel, Schrauben, Seile etc., d. h. sie ist ohne viel Zeitaufwand zu konstruieren. Man kann die Genialität Leonardos nachvollziehen, indem man die Brücke selber baut.

Besonders faszinierend dabei ist, dass man mit einer kleinen Brücke beginnen und diese dann schrittweise zu einer immer größeren Brücke erweitern kann. Die Minimalversion besteht aus nur zwei „Brückengliedern“ und insgesamt 6 Brettchen (vgl. Abb. 3), bei jedem Schritt („Brückenglied“) kommen 4 weitere Brettchen dazu. Die Brücke verfügt über eine erstaunliche Tragfähigkeit und Selbststabilisierung bei Belastung, wie man beim Bauen selbst merkt.

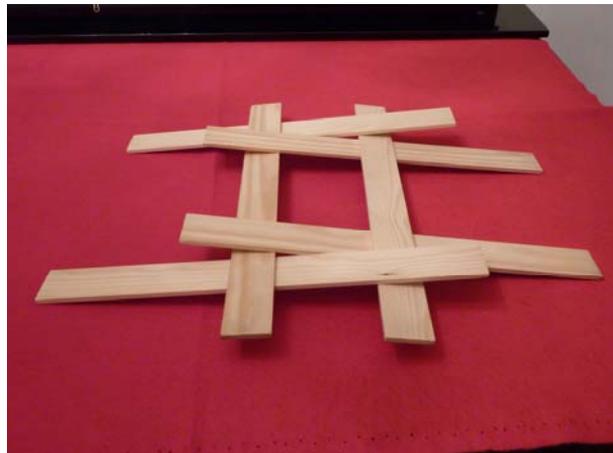


Abb. 3: Minimalversion

Hier ergibt sich z. B. schon eine interessante Fragestellung: Wie viele Brettchen braucht man für eine Brücke aus 3, 4, 5, . . . ,  $n$  Gliedern? Je nach Altersstufe kann eine Tabelle angelegt, der Zusammenhang rekursiv beschrieben oder die explizite Formel  $(4n - 2)$  angegeben werden.

Faszinierend ist sicher auch die verhältnismäßig große Spannweite, die mit den kurzen Hölzern ohne weitere Befestigungen wie Seile und Nägel erreicht werden kann.



Abb. 4: Leonardo-Brücke am Schulgelände

Am Gymnasium Seebachergasse in Graz wurde im Schuljahr 2004/05 unter der Leitung von Prof. Erich Reichel ein erfolgreiches Projekt „Naturwissenschaftliche Übungen“ durchgeführt. Dieses hatte das Ziel eine große Leonardo-Brücke auf dem Schulgelände zu bauen, das nebenstehende Foto stammt von der zugehörigen Internetseite<sup>3</sup>.

Wir werden im Folgenden keine zylindrischen Hölzer, sondern kurze Latten mit rechteckigem Querschnitt verwenden (z. B. im Baumarkt zu haben mit einer Dicke von 5 mm, Breite 4 cm; sinnvolle Zuschnittlänge z. B. 40 – 60 cm). Abb. 3 zeigt eine solche Brücke (6 kurze Latten, die sich selbst tragen).

<sup>3</sup> <http://physik.seebacher.ac.at/html/Leonardo.htm>

Bei dieser Brücke gibt es – wie schon erwähnt – reichhaltige Mathematik zu entdecken, die sehr elementar ist, so dass eine Auseinandersetzung im Unterricht in den verschiedensten Stufen möglich ist, auch schon in den ersten Stufen der Sekundarstufe 1.

Bevor wir uns mit den konkreten Aktivitäten in den einzelnen Klassenstufen beschäftigen, seien im folgenden Kapitel einige Gründe aufgezeigt, die eine Behandlung dieses Themas aus fachdidaktischer Sicht sinnvoll erscheinen lassen.

## 2. Das fachdidaktische Potential dieses Themas

Das hier dargestellte Thema „Leonardobrücke“ hat großes fachdidaktisches Potential und bietet eine Fülle von Möglichkeiten eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts. Mit „zeitgemäß“ meinen wir hier Forderungen bzw. Kriterien, die von der Mathematikdidaktik schon seit langem angegeben werden.

### 2.1 Mathematik als Prozess

An dem hier dargestellten Thema können viele mathematische *Aktivitäten* mit deutlichem Prozesscharakter verwirklicht werden, also Bestandteile des *Betreibens* von Mathematik im besten Sinn: Probieren, Vermutungen erstellen, Situationen explorieren, wichtige Einsichten erlangen, Phänomene beschreiben, Begründungen geben etc. Mathematik und ihr Unterricht fußen im durchschnittlichen deutschen Sprachraum immer noch zu sehr auf der Auffassung *Mathematik als Produkt* und zu wenig auf *Mathematik als Prozess*.

In den letzten Jahren ist zwar der Anteil von *Mathematik als Prozess* sicher etwas gestiegen, aber eine weitere Steigerung im täglichen Unterricht ist trotzdem angebracht! BORNELEIT/DANCKWERTS/HENN/WEIGAND (2001, S. 76) schreiben: „Entscheidend für den Erfolg, die Entwicklung von Sinn und die Nachhaltigkeit von Unterricht ist die Art und Weise, *wie* mit der Mathematik umgegangen wird. Hier geht es um den Unterschied zwischen *Mathematik als Produkt* und *Mathematik als Prozess*. Beide Sichtweisen gehören zu einem gültigen Bild von der Mathematik, aber nur eine prinzipiell offene prozessorientierte Unterrichtsführung kann der Bedeutung der Heuristik für das Lernen von Mathematik gerecht werden.“ Bei „Heuristik“ beziehen sie sich auf die 3. WINTER'sche Grunderfahrung, die Mathematikunterricht ermöglichen soll (vgl. WINTER 2003). Auch BORNELEIT/DANCKWERTS/HENN/WEIGAND meinen, dass momentan zwar der Aspekt von Mathematik als Produkt noch zu sehr vorherrscht, dass aber die Entwicklung vorsichtig in die richtige Richtung geht, auf S. 80 heißt es weiter: „Das Bild von Mathematik und das Selbstbild werden durch die beschriebenen Problemfelder (einseitige Orientierung am Kalkülaspekt der Disziplin Mathematik sowie die etablierte Unterrichtskultur) ungünstig beeinflusst. Angesichts spürbar veränderter Schülerpopulationen am Gymnasium wächst allerdings die Akzeptanz für Neuorientierungen, zumal die öffentliche Diskussion um TIMSS<sup>4</sup> den Blick auf die Schulrealität nachhaltig geschärft hat.“

Natürlich kann nicht der ganze Unterricht aus Phasen der selbständigen Wissens**konstruktion** durch Lernende bestehen, auch die **Instruktion** muss ihren Platz haben, aber etwas mehr Verschiebung in Richtung Konstruktion ist sicher angebracht, es sollte eine sinnvolle Balance zwischen Konstruktion und Instruktion sein – keine leichte Aufgabe! Dabei mögliche „Akzentverschiebungen“ am konkreten Beispiel des Analysisunterrichtes hat z. B. HENN (2000) beschrieben.

Dazu ein plakativer Vergleich: Viele Lehrende sehen sich beim Unterricht als eine Art „Angestellte der Firma Mathematik“, und zwar leider nur in der *Versandabteilung*: Es werden mathematische Häppchen verpackt und an die Adressaten (Konsumenten, Schüler/innen) „geschickt“. Leider geht die „Sendung“ dabei oft verloren bzw. in Brüche, oder die potentiellen Empfänger verweigern die Annahme. Mathematikunterricht soll sich viel öfter in der *Produktionsabteilung* oder noch plakativer

---

<sup>4</sup> Anmerkung des Verfassers: Jetzt könnte man ergänzen „und PISA“.

gesprächen: in der *Werkstatt* der Firma Mathematik abspielen: D. h. Lehrende und Lernende sollen sich als *produktive* Mitarbeiter verstehen!

Es geht bei einem prozessorientierten Mathematikunterricht, in dem die Lernenden beim Arbeits- und Lernprozess einen höheren Grad an Selbständigkeit haben, keineswegs darum, dass die Lehrperson nichts mehr tun soll (die Lernenden in ihrem Lernprozess ganz allein zu lassen und zu hoffen, dass sie ganz auf sich gestellt in der Mathematik „das ganze Rad neu erfinden bzw. entdecken“), sondern primär darum, den *Lernprozess* der Lernenden *gezielt anzuregen* und dadurch zu steuern (Lehrende auch als „Manager von Lernprozessen“).

„[...] Absage an straff strukturierte Unterrichtsgänge, die die Schüler/innen an einer vorstrukturierten, kleinschrittig und linear organisierten Gedankenkette entlang zu führen versuchen. Das ist aber keine Absage an unterrichtliche Vorgaben generell. Vielmehr kommt es darauf an, Lernumgebungen zu schaffen, in denen die geistige Konstruktionstätigkeit angeregt und zur Auseinandersetzung herausgefordert wird, die aber gleichzeitig Orientierung vermitteln.“ (HEFENDEHL-HEBEKER 2000, S. 21). Ein Paradebeispiel einer solchen Lernumgebung ist z. B. die Konstruktion einer Aufgabenserie, in der Lernende in Klasse 6 selbständig die Teilbarkeitsregel durch 9 entdecken können (HEFENDEHL-HEBEKER 2000, S. 22 ff). In Anlehnung an WINTER 1984 werden dabei Aufgabenserien konstruiert, die mehrere Schichten haben: erstens einen unmittelbaren Übungszweck (hier: Division mit Rest) und zweitens auch eine innere Systematik, die auf weiterführende Einsichten verweist und zum Entdecken anregt. Hier wird sozusagen „übend entdeckt und entdeckend geübt“ (WINTER 1984). U. a. solche Situationen sind gemeint, wenn von „substanziellen“ bzw. „produktiven Lernumgebungen“ die Rede ist (WITTMANN 1995). Die Entwicklung und Evaluierung solcher Lernumgebungen ist eine der zentralen Aufgaben der Mathematikdidaktik:

Wie können interessante Probleme bzw. Aufgaben(reihen) auch zu *Standardthemen* des Mathematikunterrichts zur selbständigen Bearbeitung durch Lernende konzipiert werden, die – mit genügend Bearbeitungszeit versehen – geeignet sind, 1) interessante Phänomene zu entdecken, 2) dadurch ein Begründungsbedürfnis zu wecken, 3) dieses auch zu befriedigen (Einsicht in das „Warum?“: „Proofs that only prove“ vs. „proofs that also explain“ – vgl. HANNA 1989).

## 2. 2 Mathematikunterricht ausgehend von konkreten Phänomenen

Es ist sehr positiv, wenn ein Unterrichtsthema von einem konkreten Phänomen ausgehen kann. Dies ist einerseits förderlich für die Motivation und entspricht andererseits dem Unterrichtsprinzip von *Mathematik als Prozess* – siehe oben. Die zugehörigen bzw. zu Grunde liegenden Phänomene, die wichtigen Ideen (vgl. schon VOLLRATH 1978) sind beim Mathematikunterricht oft verborgen hinter Formalismen und abstrakten Strukturen. Wenn es noch dazu die Gelegenheit gibt, dass im Unterricht etwas gebastelt bzw. gebaut werden kann, wird dieser Effekt noch einmal verstärkt – Mathematik zum „Begreifen“ im wahrsten Sinne des Wortes. Schon WHITEHEAD (1962, 28) hat darauf hingewiesen, dass der Lernprozess immer eine „romantische Stufe“ haben soll: „The stage of romance is the stage of first apprehension. The subject-matter has the vividness of novelty; it holds within itself unexplored connexions with possibilities half-disclosed by glimpses and half-concealed by the wealth of material. In this stage knowledge is not dominated by systematic procedure.“ Erst dann kommt eine Stufe der „Präzision“, auf der die Exaktheit dann eine größere Rolle bekommt. Es ist schon bemerkenswert, welch hohen Stellenwert WHITEHEAD dieser „romantischen Phase“ beigemessen hat: „It is evident that a stage of precision is barren without a previous stage of romance: unless there are facts which have already been vaguely apprehended in their broad generality, the previous analysis is an analysis of nothing. It is simply a series of meaningless statements about bare facts, produced artificially and without any further relevance.“ (S. 29)

Die Bedeutung von „Phänomenen“ bringt auch GALE (1990) auf den Punkt, wenn er schreibt: „The main goal of all science is first to observe and then to explain phenomena. In mathematics the explanation is the proof.“

## 2.3 Realitätsbezüge im Mathematikunterricht

Obwohl die Leonardo-Brücke nicht für alle in ihrem jeweiligen täglichen Leben wichtig ist, hat dieses Thema doch einen deutlichen Realitätsbezug; nicht im Sinne einer Modellierungsaufgabe, sondern in dem Sinne, dass diese Brücke ein faszinierendes Stück Realität ist, das Bedeutung im Leben Leonardos hatte und das schon in mancher Stadt (z. B. in Freiburg, siehe Abb. 26) zu sehen war. Das Prinzip von einander abstützenden Elementen („selbsttragend“) kommt noch in vielen anderen Konstruktionen zum Einsatz.

Hier ist nicht der Ort, lange allgemein über „Realitätsbezüge im Mathematikunterricht“ zu schreiben, aber es ist eine alte und breit anerkannte Forderung, dass Mathematikunterricht *auch* Realitätsbezüge mit einbeziehen muss („Anwendungsorientierung“). So schreibt z. B. schon H. WINTER (1976, S. 110), dass eines der vier von ihm genannten Lehrziele (L1) – (L4) darin besteht: „(L3) Der Unterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, die praktische Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren.“ Dieser Punkt ist auch fast dreißig Jahre später bei WINTER (2003) als erste Grunderfahrung zu finden, die der Mathematikunterricht ermöglichen soll: „(G1) [...] Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen.“ Wir haben diese Zitate gewählt, weil die Formulierungen in dieser oder in einer etwas abgewandelten Form Eingang in viele Lehrpläne gefunden haben, man könnte aber, um die Wichtigkeit von Realitätsbezügen im Mathematikunterricht zu untermauern bzw. für konkrete Vorschläge, auch andere Autorinnen bzw. Autoren zitieren, die jeweils schon Vieles zu diesem Thema geschrieben haben (z. B. HENN 2002, HENN/MAAB 2003, BLUM u. a. 2007, MAAß 2007, etc.).

## 2.4 Weitere Aspekte – kurz zusammengefasst

Das Thema eignet sich auch für projektartigen Unterricht und lässt sich auch noch weiter ausbauen, sowohl in mathematischer als auch in anderer Hinsicht. Es sind z. B. viele *historische* Bezüge bzw. Querverbindungen möglich, ein Aspekt, der für viele Lernende sehr motivierend sein kann und ein Thema lebendig erscheinen lässt. Wie und wovon hat ein Wissenschaftler wie Leonardo damals gelebt? Fragen wie „Welche (berühmte oder weniger berühmte) andere Dinge hat Leonardo noch erfunden?“, „Welche davon sind in die Tat umgesetzt bzw. wirklich gebaut worden?“ können einen Bezug des Faches Mathematik zu „Technik“ schaffen. Klarer Weise könnte bei einer Einbettung des Themas auch fächerübergreifend mit Kunst gearbeitet werden.

Andererseits ist auch gut möglich, dass das Thema nicht nur nicht ausgebaut, sondern gar nicht in der hier präsentierten „Gänze“ behandelt wird. Es können auch durchaus nur Teile davon in gewissen Klassenstufen gewählt werden, wobei es sicher auch noch auf ganz andere Weise behandelt werden kann. Es bietet also eine breite Variabilität, sowohl was den Umfang als auch was die Inhalte betrifft.

Der Computer kann sinnvoll eingesetzt werden (DGS, EXCEL, Funktionenplotter, CAS). Natürlich ist „Computereinsatz“ kein Qualitätskriterium per se: Unterrichtsinhalte sollen nicht danach ausgesucht werden, ob dabei auch Computer einsetzbar sind („das Werkzeug bestimmt die Inhalte“), sondern natürlich müssen umgekehrt die beabsichtigten Inhalte (nach anderen fachlichen, didaktischen und pädagogischen Kriterien gewählt) die Werkzeuge bestimmen! Der Computer kann dabei nicht nur von langwierigen und umständlichen Termumformungen bzw. vom Gleichungslösen etc. befreien, sondern auch: „Graphische Visualisierungen inner- und außermathematischer Anwendungen unterstützen den semantischen Zugang zu den mathematischen Inhalten. Man wird angeregt, selbst Fragen zu stellen, und kann die induktiven Aspekte wie Probieren und Experimentieren, Verallgemeinern und Spezialisieren in weitaus höherem Maß als ohne Computer erfahren.“ (HENN 1997, S. 8)

Das Thema hat verbindenden („Brücken bauen“) und internationalen Charakter (Leonardo, Italien, Türkei, Norwegen), so dass es evtl. für ein nicht nur Flussseiten, sondern auch Länder verbindendes EU-Projekt geeignet erscheint.

### 3. Mögliche Aktivitäten in der 5./6. Schulstufe

Bereits in dieser Altersstufe können interessante Fragen rein *praktisch* beantwortet werden, indem die Leonardo-Brücke mit Schülern/innen gebaut wird. Z. B. sollen sie eine große Brücke aus einigen Gliedern bauen und der Frage nachgehen: was ist, wenn man aus demselben Baumaterial in derselben Weise zwei kleinere, gleiche, aneinander stoßende Brücken baut: wie weit kommt man dabei insgesamt (weniger, gleich, mehr)? Interessant sind dabei sicher auch vorherige Schätzungen. Wie ist die Lage, wenn man zwei verschieden große Brücken aus demselben Baumaterial baut? Hier erkennen die Schüler/innen vielleicht schon intuitiv auch den Grund dafür, dass man mit zwei kleineren, flacheren Teilbrücken weiter kommt als mit einer größeren, höheren (aus demselben Baumaterial), salopp ausgedrückt: „Das Bauen hoher Bögen frisst mehr Material“ (für eine mögliche Exaktifizierung siehe Klassenstufe 9/10). Für eine möglichst große Gesamtspannweite findet man auch rein durch Probieren heraus: Es ist am besten, möglichst viele nur zweigliedrige Brücken zu bauen. Aber unter anderen Gesichtspunkten hat dies auch Nachteile, welche?

Neben der *praktischen* Auseinandersetzung (Bauen) gibt es in dieser Altersstufe auch die Möglichkeit einer *zeichnerischen*.

Dazu zunächst eine **vereinfachte** (schematische) Darstellung der Leonardo-Brücke, in Abb. 5 eine aus nur 2 Brückengliedern, sozusagen die „Grundversion“: Die Dicke der Bretter und die „Geometrie der Kreuzung“ bleiben dabei zunächst außer Acht! Schon in dieser Schulstufe gibt es dazu einige spannende Aufgaben zum Thema „Winkel“.

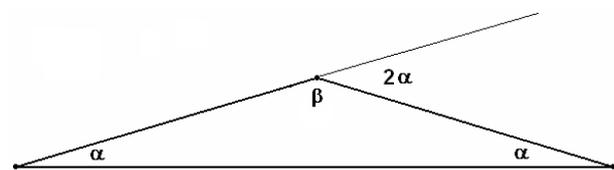


Abb. 5: Leonardobrückenglied – schematisch

Das Bauen einer größeren Leonardo-Brücke kann nun auch zeichnerisch leicht nachvollzogen werden. Abb. 6 zeigt eine Brücke aus 6 Gliedern. Wir setzen dabei voraus, dass die Brücke von Beginn „auf die gleiche Art“ (d. h. gleiche Winkel  $\alpha$  bzw.  $\beta$ <sup>5</sup>) weitergebaut wird. In der vereinfachten Darstellung würde dies ca. so aussehen: Zwischen je 2 benachbarten Brückengliedern tritt derselbe Winkel  $\beta$  auf:

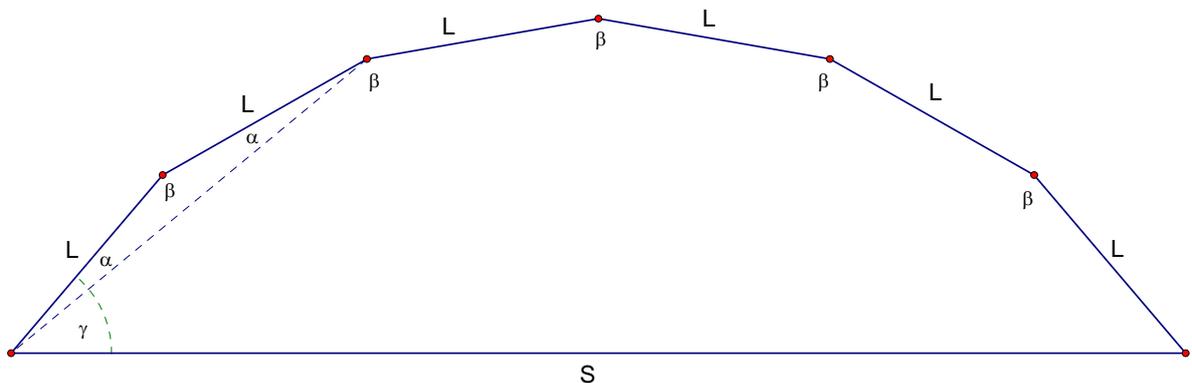


Abb. 6: Schematische Leonardo-Brücke mit 6 Gliedern

Sobald der Winkelbegriff etabliert ist, sind damit verschiedene Aktivitäten zum Thema „Zeichnen von Leonardo-Brücken“ denkbar (beim Zeichnen einer Leonardo-Brücke muss immer wieder dasselbe Stück der Länge  $L$  mit „Knickwinkel“  $\beta$  aufgetragen werden):

<sup>5</sup> In der 5. Schulstufe wird es primär um den Winkel  $\beta$  gehen, der Winkel  $\alpha$  gewinnt erst bei den Aktivitäten in den höheren Klassenstufen an Bedeutung.

- Zeichne mit gegebenen Werten von  $L$  und  $\beta$  eine Leonardo-Brücke mit einer gegebenen Anzahl  $n$  von Gliedern. Dabei ist es zunächst nicht klar, wie man hier am besten beginnt („Anfangswinkel“  $\gamma$ ), so dass der Endpunkt der Brücke auf gleicher Höhe wie der Anfangspunkt liegt.
  - (1) *Zeichnen per Hand* (Klasse 5): genaues Zeichnen wird geübt; das Abtragen des stumpfen Winkels  $\beta$  wird mit dem leichteren Abtragen des spitzen Außenwinkels  $180^\circ - \beta$  geschehen. Dem oben genannten Problem könnte durch *Ausschneiden* und anschließendes „*waagerechtes Hinkleben*“ ins Heft begegnet werden.
  - (2) *Zeichnen mit DGS* (Klasse 6): Immer wieder Drehung einer L-Strecke um ihren Endpunkt um den Winkel  $\beta$ . Hierbei kann schon sehr früh ein großer Vorteil eines DGS klar werden: Wenn man bei dieser Konstruktion den Drehwinkel  $\beta$  und den Anfangswinkel  $\gamma$  variabel lässt, so kann man auch im Nachhinein so justieren, dass die Brücke waagrecht ist (das Ausschneiden bzw. Kleben entfällt).
- Zeichne bei gegebenen Werten von  $L$  und  $\beta$  (z. B.  $L = 5 \text{ cm}$ ,  $\beta = 160^\circ$ ) verschiedene Leonardo-Brücken (d. h. mit verschiedenen Anzahlen  $n$  von Brückengliedern). Welche Anzahlen  $n$  von Brückengliedern sind denn hier für eine wirkliche Brücke überhaupt möglich? Was passiert, wenn man in der Zeichnung zu viele Brückenglieder anfügt?
- Es werden sich bei unterschiedlich vielen Brückengliedern verschiedene „Spannweiten“  $S$  ergeben. Wer kann die Brücke mit der *größten Spannweite* zeichnen?
- Zeichnen mit vorgegebenem *Maßstab*: Werte von  $\beta$  und  $L$  seien „in der Realität“ gegeben; Ablesen von *Spannweite* und *Höhe* der Brücke in der Zeichnung, Umrechnen in die Realität.

#### 4. Mögliche Aktivitäten in der 7./8. Schulstufe

Diese Aktivitäten sind *auch* für die 9. Schulstufe geeignet.

##### 4.1 Der Anfangswinkel $\gamma_n$ bei $n$ Brückengliedern

Wenn man bei einer Brücke aus 2 Gliedern ( $L$ ,  $\alpha$ ) weitere Brückenglieder anbaut, wird die Anfangssteigung (Steigung des ersten Brückengliedes) immer steiler, Abb. 7 zeigt ein Beispiel aus vier Brückengliedern. Auch dies sollte unbedingt bei einem konkreten Modell erlebt werden (nachbauen)!

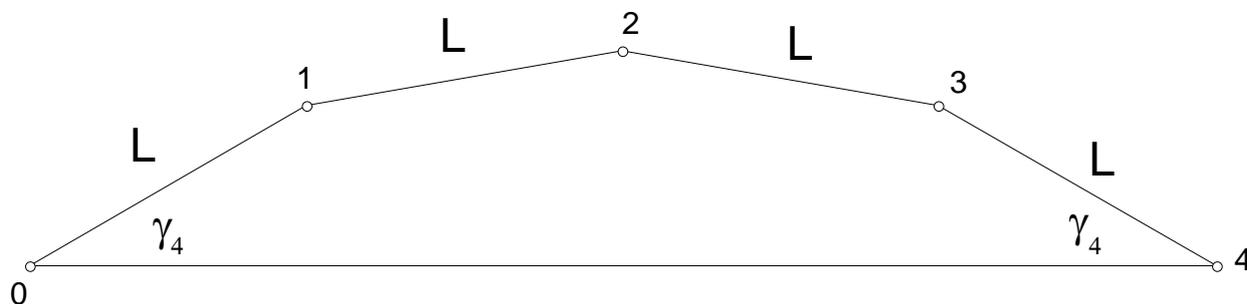


Abb. 7: Vier schematische Brückenglieder

Wie entwickelt sich der Anfangswinkel  $\gamma_n$  bei  $n$  Brückengliedern? Diese Frage ist für Schüler/innen auch in Eigenregie gut zu erkunden. *Vermutungen* finden und formulieren sicher auch nicht so leistungsstarke Schüler/innen, wenn auch nicht perfekte Begründungen dafür, und vielleicht finden sie weitere interessante *Fragen* bzw. *Beobachtungen*?

Bei der einfachsten Brücke mit zwei Gliedern ist  $\gamma_2 = \alpha$ .

Der Winkel nimmt mit wachsendem  $n$  sicher zu, aber wie? Hier können konkrete Vermutungen am Modell bzw. mit DGS oder mit Papier und Bleistift überprüft werden.

Man kann auf mehrere Arten einsehen, dass gilt:

$$\gamma_n = (n-1) \cdot \alpha \quad \gamma_n \text{ wächst mit jedem } n \text{ um } \alpha.$$

Bemerkung: Die Außenwinkel betragen immer  $2\alpha$ .

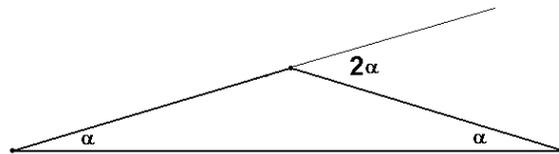


Abb. 8: Außenwinkel  $2\alpha$

Bei einer Brücke aus 3 Gliedern ist wegen der Parallelität der Strecken  $\overline{12}$  und  $\overline{03}$  sofort klar, dass  $\gamma_3 = 2\alpha$  ist (vgl. Abb. 9).



Abb. 9:  $\gamma_3 = 2\alpha$

**Symmetrie:** Gleichschenkliges Trapez mit Neigungswinkel  $\gamma_3 = 2\alpha$ .

(Warum ist  $\overline{03}$  parallel zu  $\overline{12}$ ? Warum ist das Viereck 0123 ein gleichschenkliges Trapez? Dies könnte man noch genauer begründen. Was sind die genauen Voraussetzungen?)

Nun kennen wir schon zwei Werte:  $\gamma_2 = 1 \cdot \alpha$  und  $\gamma_3 = 2 \cdot \alpha$ .

Eine mögliche allgemeine Begründung: Sehr anschaulich geht dies z. B. dadurch, dass bezogen auf die Waagerechte mit jedem „Doppelschritt“ (d. h. je ein Brückenglied an den Enden anbauen) ein Winkel von  $2\alpha$  dazukommt:

Stellvertretend die „Doppelschritte“  $2 \rightarrow 4$  und  $3 \rightarrow 5$ :

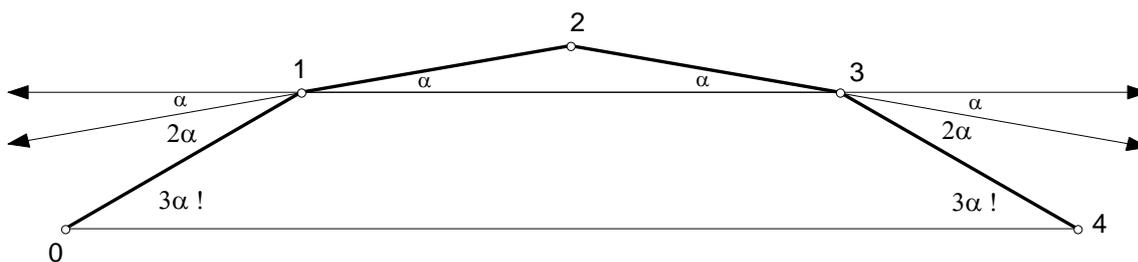


Abb. 10a: Doppelschritt  $2 \rightarrow 4$

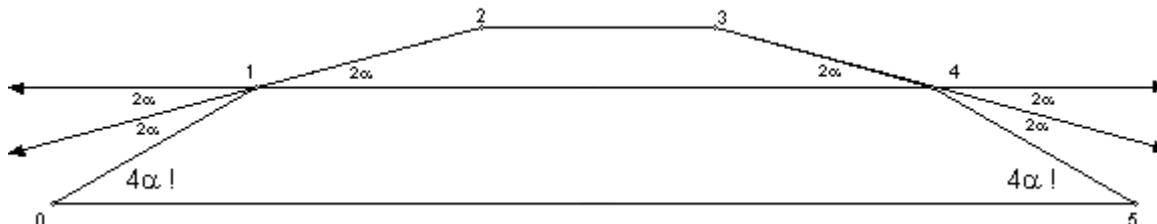


Abb. 10b: Doppelschritt  $3 \rightarrow 5$

Klar: Die Parallelitäten bleiben dabei erhalten (warum genau?), z. B.  $\overline{23} \parallel \overline{14}$ ,  $\overline{14} \parallel \overline{05}$

Damit ist ausgehend von  $\gamma_2 = \alpha$  und  $\gamma_3 = 2\alpha$  alles gezeigt. Natürlich gäbe es hier noch viele andere Arten der Begründung, z. B. ein induktives Argument mit *Einzelschritten*:

Wenn man weiß (Induktionsannahme), dass der Anfangswinkel bei  $n$  Brückengliedern  $(n-1) \cdot \alpha$  und bei  $n-1$  Brückengliedern  $(n-2) \cdot \alpha$  beträgt, so muss (Wechselwinkel!) beim Übergang von  $n$  auf  $n+1$  genau ein Winkel  $\alpha$  dazukommen (vgl. Abb. 11).

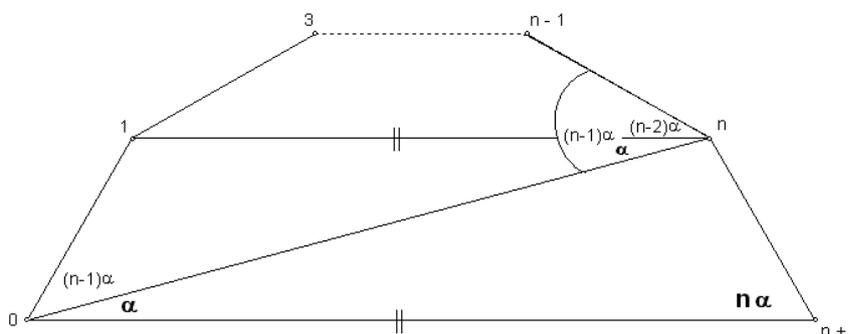


Abb. 11: Induktive Begründung

Hiermit ist übrigens auch das Problem gelöst: Mit welchem Startneigungswinkel muss man bei gegebenem  $n$  und  $\alpha$  zu zeichnen beginnen, damit die Brücke insgesamt genau waagrecht wird (vgl. das Problem des „Ausschneidens“ in Klassenstufe 5/6).

## 4.2 Die Lage der Eckpunkte einer vereinfachten Leonardo-Brücke

Bei der Beschäftigung mit vereinfachten Leonardo-Brücken kann auffallen:

**Die Eckpunkte scheinen alle auf einem Kreis(bogen) zu liegen!**

Dafür haben wir zu begründen, dass alle Mittelsenkrechten der  $L$ -Stücke einander im selben Punkt schneiden.

Zunächst  $n=3$  (vgl. Abb. 12): Wegen der Achsensymmetrie ( $a_2$ ) des gleichschenkligen Trapezes schneiden einander  $a_1, a_2, a_3$  in einem Punkt  $(M)$ ; daher sind die Strecken  $\overline{0M}, \overline{1M}, \overline{2M}, \overline{3M}$  paarweise gleich lang ( $R$ ).

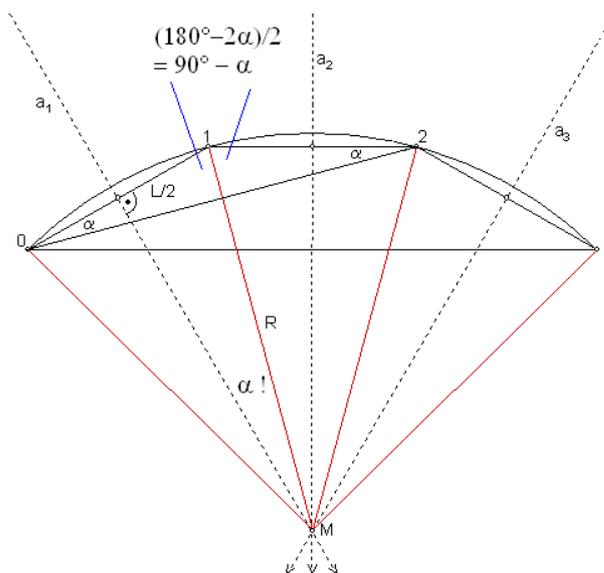


Abb. 12: Eckpunkte auf Kreisbogen

D. h. der Umkreis des Dreiecks  $\Delta 012$  ist derselbe wie jener des Dreiecks  $\Delta 123$ . Dieses Argument lässt sich natürlich auch fortsetzen (auf die Dreiecke  $\Delta 234$ ,  $\Delta 345$ , etc.), so dass die Vermutung für alle  $n$  bewiesen ist.

**Bemerkung:** Mit dem Wissen um die Kreisform und dem Umfangswinkelsatz ergibt sich übrigens eine weitere Begründung für die Beziehung  $\gamma_n = (n-1) \cdot \alpha$ : mit jedem weiteren Brückenglied kommt ein Winkel  $\alpha$  dazu (Abb. 13).

## 5. Mögliche Aktivitäten in der 9./10. Schulstufe

Es geht hierbei vor allem um Trigonometrie und Optimierung ohne Differentialrechnung.

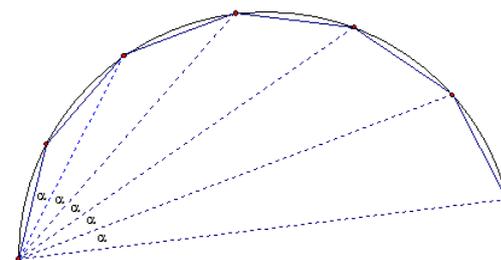


Abb. 13: Umfangswinkelsatz

## 5.1 Radius des Umkreises

Der Radius des Kreises ist natürlich der Umkreisradius der jeweiligen Dreiecke bzw. Vielecke:

$R = \frac{L}{2 \sin \alpha}$ . Dies kann einerseits sofort aus der bekannten Formel für Umkreisradien z. B. im Dreieck  $\Delta 012$  abgelesen werden.

Andererseits ist dies aber auch dann einzusehen, wenn diese Formel für den Umkreisradius im Dreieck noch nicht bekannt ist (siehe Abb. 12), also zu einem sehr frühen Zeitpunkt der Beschäftigung mit Trigonometrie, nur mit dem Wissen: „Sinus = Gegenkathete / Hypotenuse“: Bei jedem Eckpunkt beträgt der Winkel  $180^\circ - 2\alpha$ , die Hälfte also  $90^\circ - \alpha$ . Daher müssen die Winkel zwischen Radien und zugehörigen Mittelsenkrechten jeweils  $\alpha$  betragen. Somit ergibt sich  $\sin \alpha = (L/2) : R$  und daraus obige Beziehung.

## 5.2 Noch einmal: möglichst große Spannweite!

**Wie viele Elemente (Anzahl  $n$ ) soll die Brücke bei festem  $\alpha$  haben, so dass die Spannweite möglichst groß wird?**

Dies ist eine nur *theoretisch* interessante Frage, denn sehr steile Brücken sind für die Praxis nicht geeignet. Es ist ein Optimierungsproblem, das ohne Differentialrechnung bearbeitet und gelöst werden kann und soll.

Mit dem Wissen, dass die Eckpunkte einer Leonardo-Brücke alle auf einem Kreis liegen, kann diese Frage leicht beantwortet werden.

Damit ist ja schon klar, dass die Spannweite immer größer wird, so lange man in der Leonardo-Figur den *Halbkreis* nicht überschreitet. Beim Überschreiten des Halbkreises kann alles passieren, es kommt dabei auf den Wert von  $\alpha$  an: es kann sich eine letzte Vergrößerung, keine Veränderung oder schon eine Verkleinerung der Spannweite ergeben. In Abb. 14 ist ein Fall dargestellt, in dem sich von  $s_6$  auf  $s_7$  keine Veränderung ergibt (sie befinden sich genau symmetrisch zum Durchmesser). Man wird in einem solchen Fall wohl  $n_{\text{opt}} = 6$  nehmen, da man mit weniger Aufwand dieselbe Spannweite erreicht. Solche Situationen treten aber nur bei wenigen Winkeln auf – siehe unten.

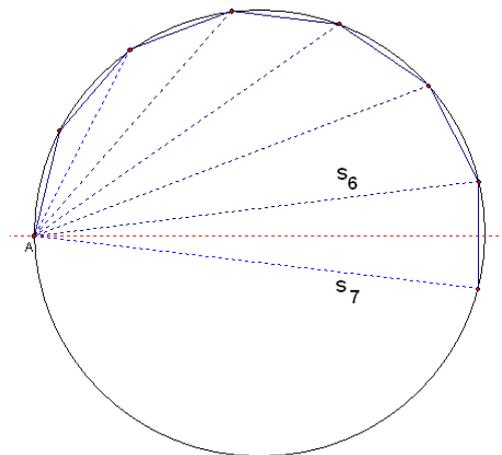


Abb. 14:  $|s_6| = |s_7|$

Klar ist natürlich auch, dass die Spannweite in natürlicher Weise durch den

Durchmesser  $2R = \frac{L}{\sin \alpha}$  des Kreises nach oben beschränkt ist.

Der Zentriwinkel jedes Brückengliedes beträgt  $2\alpha$  (Abb. 12). Mit der Sichtweise der „Halbkreisüberschreitung“ als ungefähre kritische Grenze (Durchmesser!) ergibt sich auch leicht die genauere Version davon: Für die gesuchte Anzahl  $n_{\text{opt}}$  muss gelten, dass der „Gesamtzentriwinkel“ der Brücke  $n_{\text{opt}} \cdot 2\alpha \approx 180^\circ$ , und zwar möglichst nahe. Für jedes Intervall  $[180^\circ - \alpha; 180^\circ + \alpha)$  gibt es klarer Weise genau einen Wert  $n$  mit  $180^\circ - \alpha \leq n \cdot 2\alpha < 180^\circ + \alpha$ , und dieser spezielle Wert ist der für die Spannweitenmaximierung optimale:

$n_{\text{opt}}$	$\alpha$ -Bereich (Grad)
2	[ 36,0 ; 60,0 )
3	[ 25,7 ; 36,0 )
4	[ 20,0 ; 25,7 )
5	[ 16,4 ; 20,0 )
6	[ 13,9 ; 16,4 )
7	[ 12,0 ; 13,9 )
8	[ 10,6 ; 12,0 )
9	[ 9,5 ; 10,6 )
10	[ 8,6 ; 9,5 )
⋮	⋮

Tab. 1

$$(*) \quad 180^\circ - \alpha \leq n_{\text{opt}} \cdot 2\alpha < 180^\circ + \alpha$$

Dies ist gleichbedeutend mit  $\frac{90^\circ}{\alpha} - \frac{1}{2} \leq n_{\text{opt}} < \frac{90^\circ}{\alpha} + \frac{1}{2}$ , d. h. bei gegebenem  $\alpha$  ist  $n_{\text{opt}} = \left\lceil \frac{90^\circ}{\alpha} - \frac{1}{2} \right\rceil$  („nächstgrößere ganze Zahl“, „nach oben gerundet“). Damit kann man für jeden beliebigen Wert von  $\alpha$  die optimale Anzahl  $n_{\text{opt}}$  von Brückengliedern bestimmen.

Aus (\*) lässt sich auch leicht die umgekehrte Frage beantworten:  $n$  vorgegeben; für welche Werte von  $\alpha$  ist dieses  $n$  die **optimale** Anzahl von Brückengliedern (so, dass **maximale** Spannweite erzielt wird)? Wenn

man beide Ungleichungen von (\*) nach  $\alpha$  auflöst, so ergibt sich:  $\frac{180^\circ}{2n+1} \leq \alpha$  und  $\alpha < \frac{180^\circ}{2n-1}$  bzw.

als Ungleichungskette:  $\frac{180^\circ}{2n+1} \leq \alpha < \frac{180^\circ}{2n-1}$ . Tab. 1 zeigt die entsprechenden Grenzzahlen bzw. Winkelintervalle für  $n_{\text{opt}}$  im Gradmaß. Eine solche Tabelle ist natürlich viel informativer als einzelne Werte von  $n_{\text{opt}}$  bei einzelnen Werten von  $\alpha$ .

#### Die „Grenzzahlen“ in der Tabelle:

- Die Grenzzahlen in der Tabelle sind genau jene Winkel, bei denen das oben geschilderte Szenario eintritt: Bezüglich der Spannweite sind zwei aufeinander folgende  $n$ -Werte optimal, weil bei diesen Werten die Gesamtzentriwinkel der Brücke (d. h.  $n \cdot 2\alpha$  und  $(n+1) \cdot 2\alpha$ ) symmetrisch um  $180^\circ$  liegen (in Abb. 14:  $n=6$ ; der Winkel  $\alpha$  musste ca.  $13,9^\circ$  betragen). Ein rechnerisch einfacheres Beispiel dafür ist  $\alpha=20^\circ$ : hier sind  $n=4$  und  $n=5$  Brückenglieder bzgl. der Spannweite gleich gut.  $n=4$  ergibt einen Zentriwinkel der Brücke von  $160^\circ$ ,  $n=5$  einen von  $200^\circ$ ; beide sind genau  $\alpha=20^\circ$  von  $180^\circ$  entfernt.
- In dieser Tabelle sieht man (im Rahmen der Tabellengenauigkeit) ganzzahlige „Grenzwinkel“ zwischen manchen Bereichen zu aufeinander folgenden Werten von  $n_{\text{opt}}$ :  $60^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $12^\circ$  (fett gedruckt). Sind diese wirklich ganzzahlig? Wenn ja, gibt es noch andere ganzzahlige?
- Es handelt sich dabei um die Werte  $\frac{180^\circ}{2n+1}$ . Die *ungeraden* nichttrivialen Teiler von 180 sind genau die Zahlen 3, 5, 9, 15, 45, und in diesen Fällen ergeben sich ganzzahlige Werte:  $60^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $12^\circ$ ,  $4^\circ$ . D. h. in obiger Tabelle ergäbe sich ein weiterer ganzzahliger Grenzwinkel von  $4^\circ$  beim Übergang von  $n=22$  (d. h.  $2n+1=45$ ) zu  $n=23$ . Andere im Gradmaß ganzzahlige Grenzwinkel gibt es nicht.

### 5.3 Berechnen der Koordinaten der Leonardo-Punkte und Computerzeichnungen

Das Zeichnen von Leonardo-Brücken („Gesamtbild der Brücke“) haben wir oben schon als Aktivität für die 5./6. Schulstufe vorgeschlagen. In der 9./10. Schulstufe könnte dieses Zeichnen auch mit EXCEL geschehen (bei vorgegebenen Werten von  $L$ ,  $n$  und  $\alpha$ ), indem zunächst die Koordinaten der Leonardo-Punkte **berechnet** werden. Es schließt sich also hier gewissermaßen ein Bogen von der 5./6. Schulstufe bis zur 9./10. Schulstufe.

Der Koordinatenursprung sei dabei in  $P_0 = (0|0)$  gewählt.

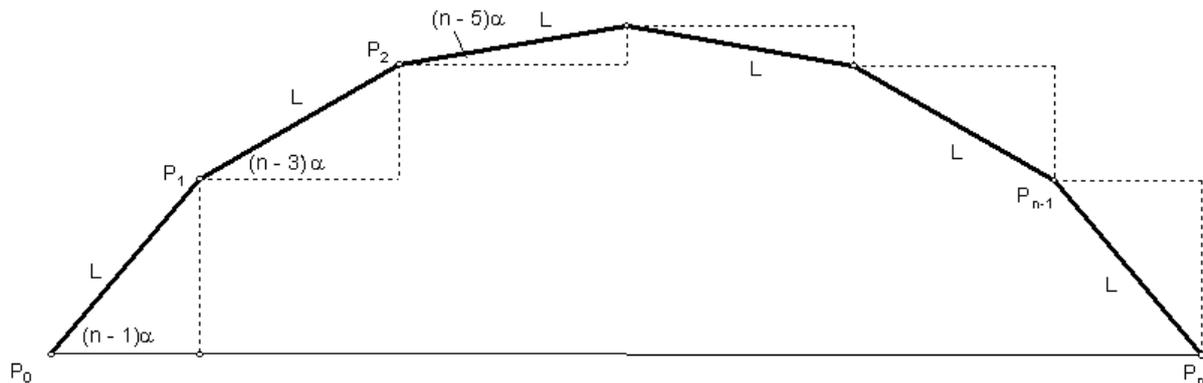


Abb. 15: Leonardo-Punkte

Die **Berechnung** der Koordinaten der Leonardo-Punkte (Aufstellen einer Formel) ist leicht möglich, wenn man bedenkt, dass die einzelnen Steigungswinkel der  $L$ -Stücke jeweils um  $2\alpha$  abnehmen (vgl. Abb. 15). D. h. bei  $P_i = (x_i | y_i)$  wird von  $i$  zu  $i+1$  der Steigungswinkel zum jeweils nächsten Punkt um  $2\alpha$  verringert.

Wir erhalten für die  $x$ -Koordinaten:

rekursiv	explizit
$x_0 = 0$	$x_0 = 0$
$x_1 = x_0 + L \cdot \cos((n-1) \cdot \alpha)$	$x_1 = L \cdot \cos((n-1) \cdot \alpha)$
$x_2 = x_1 + L \cdot \cos((n-3) \cdot \alpha)$	$x_2 = L \cdot [\cos((n-1) \cdot \alpha) + \cos((n-3) \cdot \alpha)]$
$x_3 = x_2 + L \cdot \cos((n-5) \cdot \alpha)$	$x_3 = L \cdot [\cos((n-1) \cdot \alpha) + \cos((n-3) \cdot \alpha) + \cos((n-5) \cdot \alpha)]$
$x_4 = x_3 + L \cdot \cos((n-7) \cdot \alpha)$	$x_4 = L \cdot [\cos((n-1) \cdot \alpha) + \dots + \cos((n-7) \cdot \alpha)]$
$\vdots$	$\vdots$

Tab. 2

Analog: Für die  $y$ -Koordinaten ersetzt man  $\cos$  durch  $\sin$ .

Die rekursive/iterative Berechnung dieser  $x$ - bzw.  $y$ -Werte kann bekanntlich besonders einfach in EXCEL realisiert werden, so dass man z. B. eine Tabelle wie die folgende erhält. Die  $x$ -Koordinate des letzten Punktes (wieder  $y = 0$ ) gibt die Spannweite der Brücke (hier: **4,78338612**), die  $y$ -Koordinate des (bzw. *eines* – wenn es wie hier zwei sind) mittleren Punktes gibt die Höhe der Brücke an (hier: **2,10093798**).

Hier z. B.  $L=1$ ,  $n=7$ ,  $\alpha=12^\circ$  (vgl. auch Abb. 16):

i	$X_i$	$Y_i$	Winkel in °	L	n	$\alpha$ in °
0	0	0		1	7	12
1	0,30901699	0,95105652	72			
2	0,97814760	1,69420134	48			
3	1,89169306	<b>2,10093798</b>	24			
4	2,89169306	<b>2,10093798</b>	0			
5	3,80523852	1,69420134	- 24			
6	4,47436912	0,95105652	- 48			
7	<b>4,78338612</b>	0	- 72			

Tab. 3

Wenn man diese Punkte einfach „verbunden plottet“, so erhält man ein Bild wie in Abb. 16.

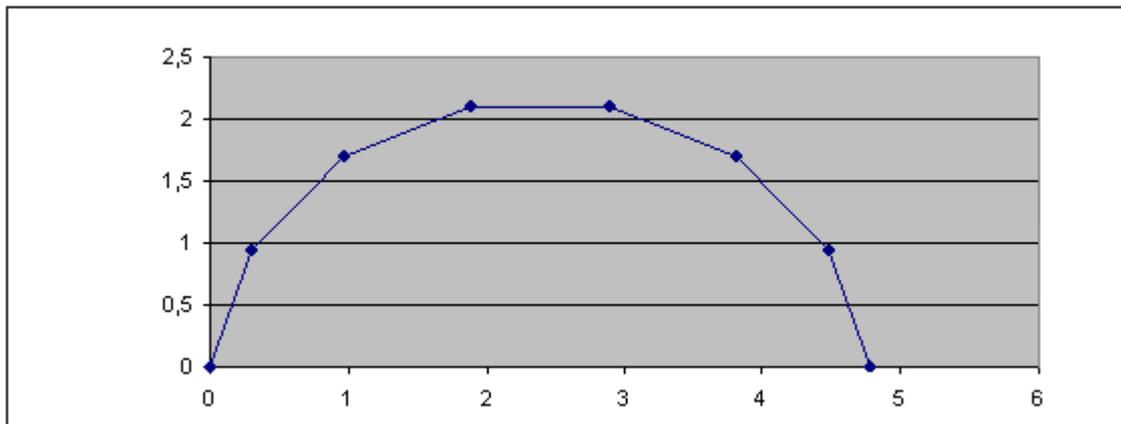


Abb. 16: Bild einer Leonardobrücke, 7 Glieder, EXCEL

Durch Änderung der Werte von  $n, L, \alpha$  in der EXCEL-Tabelle werden dabei die Koordinaten der Punkte und die zugehörige Graphik simultan angepasst, so dass „auf Knopfdruck“ viele verschiedene Brücken dargestellt werden können.

Ein zweites Beispiel:  $L=1$ ,  $n=8$ ,  $\alpha=12^\circ$  : (vgl. auch Abb. 17): Die Spannweite einer Brücke aus 8 Gliedern ist bei  $\alpha=12^\circ$  genau gleich jener mit 7 Gliedern – siehe oben.

Sie hat aber eine größere Höhe und klarer Weise einen um  $12^\circ$  größeren Startneigungswinkel.

i	$X_i$	$Y_i$	Winkel in °	L	n	$\alpha$ in °
0	0	0		1	8	12
1	0,10452846	0,99452190	84			
2	0,60452846	1,86054730	60			
3	1,41354546	2,44833255	36			
4	2,39169306	<b>2,65624424</b>	12			
5	3,36984066	2,44833255	- 12			
6	4,17885765	1,86054730	- 36			
7	4,67885765	0,99452190	- 60			
8	<b>4,78338612</b>	0	- 84			

Tab. 4

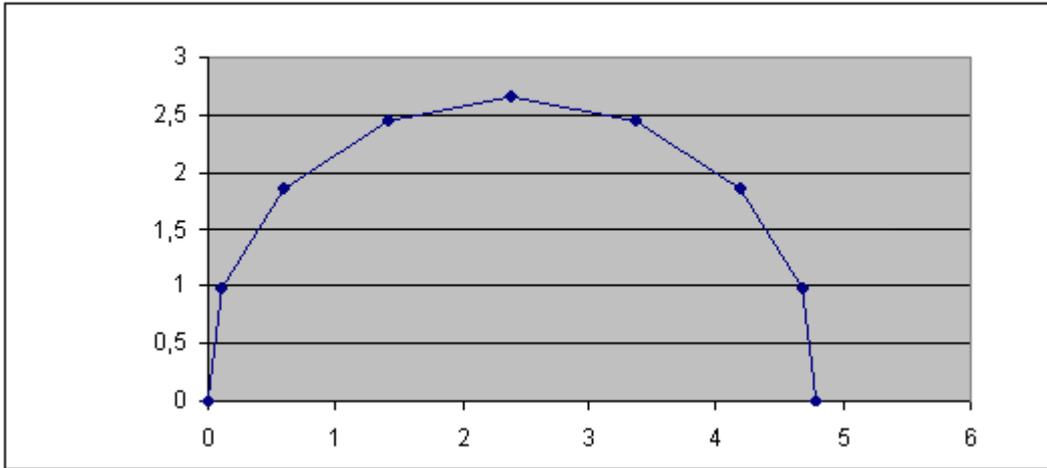


Abb. 17: Bild einer Leonardobrücke, 8 Glieder, EXCEL

## 6. Aktivitäten in der 11./12. Schulstufe

Nun kehren wir zur Ausgangskonstellation zurück, d. h. wir betrachten im Folgenden nicht mehr die vereinfachte Leonardo-Brücke (gleichschenklige Dreiecke), sondern die „echte“. Die Grundversion hat nur zwei Brückenglieder (vgl. Abb. 4).

Auch hier sei der Neigungswinkel der Bretter mit  $\alpha$  bezeichnet. Wir zeichnen wieder eine schematische Darstellung der Situation (Abb. 18). Man sollte unbedingt ein konkretes Modell aus echten Brettern vor sich haben, an dem man die im Folgenden beschriebenen und andere Phänomene konkret beobachten kann.

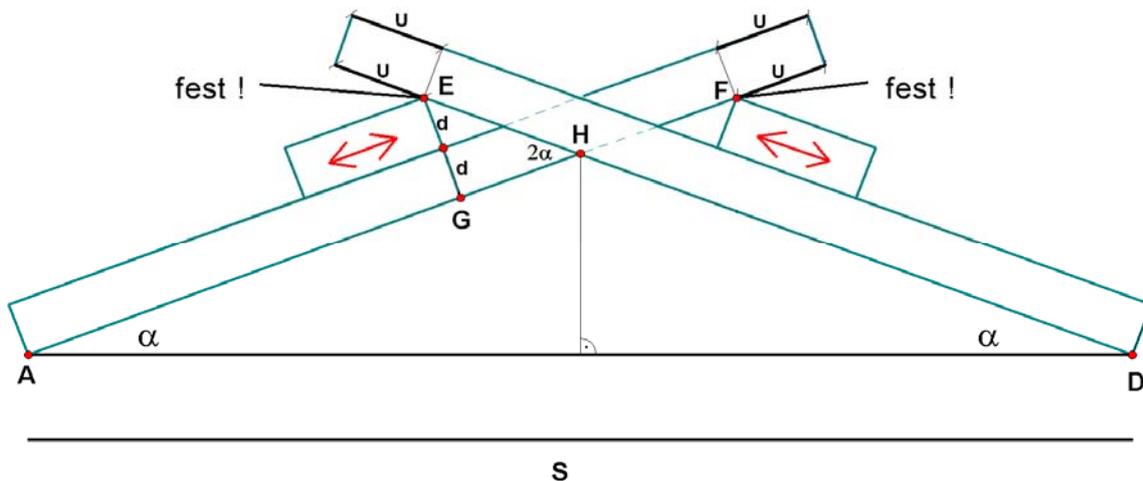


Abb. 18: Die Geometrie der Kreuzung

### 6.1 Wie hängt bei der Grundversion (zwei Brückenglieder) die Spannweite vom Winkel ab?

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass die Brettdicke  $d$ , die Brettlänge  $B$  und der nicht verwendete Überstand  $U$  fest sind. Man sieht in Abb. 18, dass der über  $E$  bzw.  $F$  hinausragende Teil  $U$  der Schrägbretter nichts zur Brücke beiträgt, deshalb bezeichnen wir ihn als „Überstand“.

Wir verschieben nun die Querhölzer, so dass  $U$  gleich bleibt, d. h. wir haben einen unveränderten Überstand der unbenutzten Bretterlängen. Die Auflagepunkte  $E, F$  der Längs- auf die Querbretterchen

ändern sich dabei nicht, die Querbrettchen mit ihren festen Verbindungen  $E$  und  $F$  nach oben rutschen auf ihrer Unterlage, den Längsbrettchen.

Dabei verändert sich der Winkel  $\alpha$  und die Spannweite  $S$ . Mit einem konkreten Modell sollte diese Veränderung unbedingt auch erzeugt und erlebt werden.

Man kann nun der Frage nachgehen: Wie hängt die Spannweite  $S$  vom variablen Wert  $\alpha$  ab („Funktionales Denken“, feste Werte  $d, B, U$ )?

Bei kleinem  $\alpha$  (Pfeilbewegung nach unten in Abb. 18) liegen die Querbrettchen fast an den unteren Enden der Schrägbrettchen, und die Spannweite ist nicht viel größer als die Brettlänge  $B$  (Probieren am konkreten Modell!). Schiebt man nun die Querbrettchen wieder etwas weiter nach innen (d. h.  $\alpha$  wird dabei größer, Pfeilrichtung nach oben in Abb. 18), so beobachtet man, dass die Spannweite dabei zunächst größer wird, dann ein Maximum erreicht, und anschließend aber wieder kleiner wird. Dies soll nun auch mathematisch nachvollzogen werden.

Für die Spannweite  $S = |AD|$  gilt:

$$S = 2 \cdot \underbrace{|DH|}_{=|AH|} \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \left( B - U - \frac{\frac{|EH|}{2d}}{\underbrace{\sin(2\alpha)}_{2 \sin \alpha \cos \alpha}} \right) \cdot \cos \alpha =$$

$$= 2 \cdot \left( (B - U) \cdot \cos \alpha - \frac{d}{\sin \alpha} \right)$$

Zu  $B = 40$  cm langen Brettern,  $U = 10$  cm und  $d = 0,5$  cm gehört nebenstehender Graph der Funktion  $S(\alpha)$  (Funktion in einer Variable). Er spiegelt genau obiges Szenario wider!

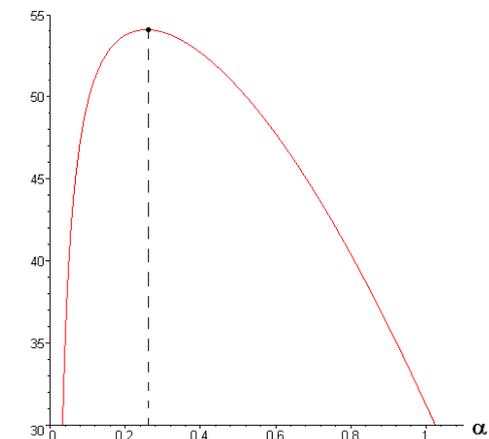


Abb. 19:  $\alpha_{\text{opt}} \approx 0,26 \approx 15^\circ$

### Für welchen Wert von $\alpha$ ist $S$ maximal?

Man kann  $\alpha_{\text{opt}} \approx 15^\circ$  einerseits am Graphen (Abb. 19, erstellt mit CAS) ungefähr ablesen, aber andererseits auch in einer Wertetabelle (Werte schnell mit CAS oder programmierbaren TR berechnen: bei DERIVE ist dies auch im *Gradmaß* möglich! Besonders einfach sind Wertetabellen mit EXCEL zu erstellen!). Mit diesen elementaren Methoden kann dieses Thema natürlich auch schon in der Jahrgangsstufe 9/10 behandelt werden.

Wenn in der 11. Schulstufe Differentialrechnung zur Verfügung steht, kann der Weg auch über die Nullstelle der 1. Ableitung gehen, wobei die Lösung der Gleichung  $S'(\alpha) = 0$  nur näherungsweise möglich ist:

$$\text{Es gilt } S'(\alpha) = 2 \cdot \left( \frac{d \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - (B - U) \cdot \sin \alpha \right).$$

Für die Werte  $d = 0,5$  cm und  $B - U = 30$  cm ergibt sich  $\alpha_{\text{opt}} \approx 0,26 \approx 15^\circ$  für die zugehörige einzige Nullstelle im Intervall  $\alpha \in [0; \pi/2]$ , dies zeigt auch der Graph von Abb. 20.

Man könnte die Gleichung  $S'(\alpha) = 0$  auch umformen zu

$$\frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{d}{B - U}: \text{ bei welchem Wert von } \alpha \text{ schneidet der}$$

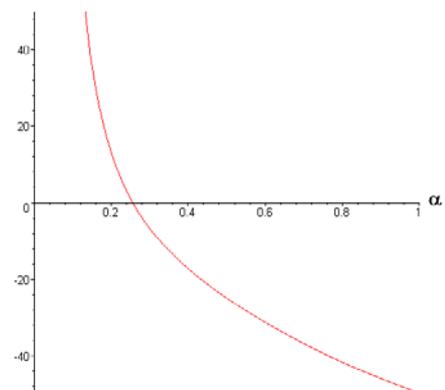


Abb. 20: Nullstelle von  $S'(\alpha)$

Graph von  $\alpha \mapsto \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha}$  die waagerechte Gerade „auf Höhe  $\frac{d}{B-U}$ “ ?

Das *näherungsweise Lösen* der zugehörigen Gleichung kann dabei entweder mit der in jedem CAS dafür vorhandenen Routine geschehen („black box“, oder mit einem Graphikrechner, oder mit EXCEL), oder mit einem konkreten Näherungsverfahren (z. B. Newton-Verfahren).

Hier wird übrigens ein wesentlicher (prinzipieller!) Unterschied zwischen vereinfachter Leonardo-Brücke und „echter“ deutlich: Während bei der vereinfachten klarer Weise uneingeschränkt gilt: „je kleiner  $\alpha$ , desto größer die Spannweite  $S(\alpha) = 2 \cdot L \cdot \cos \alpha$ , d. h. für die Spannweite ist am besten  $\alpha = 0$ “ (siehe die obere Kurve in Abb. 21:  $L = 30$  und daher  $S(\alpha) = 60 \cdot \cos \alpha$ , Randmaximum), so ist dies bei der echten nicht mehr der Fall (Abb. 19 und untere Kurve in Abb. 21, inneres Maximum).

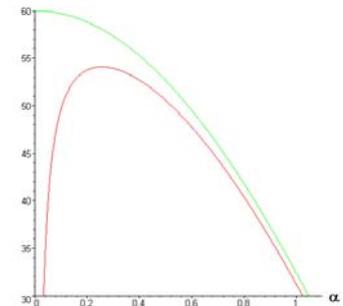


Abb. 21: Spannweiten  $S(\alpha)$

## 6.2 Zusammenhang zwischen Winkel und Spannweite bei mehreren Brückengliedern

Wir gehen davon aus, dass als Baumaterial Bretter mit konstanter Länge  $B$  und Dicke  $d$  (die Breite spielt keine Rolle) vorliegen. Der Überstand  $U$  soll bei allen „Kreuzungen“ derselbe sein, so dass bei jeder Kreuzung der „innere Kreuzungspunkt  $H$ “ (siehe Abb. 18 und 22) die Länge

$T := U + \frac{2d}{\sin(2\alpha)} = U + \frac{d}{\sin \alpha \cos \alpha}$  entfernt vom Brettende ist (der Knickwinkel bei jeder Kreuzung

beträgt ja  $2\alpha$ ). Bretter, die nicht an einem Ende der Brücke sind, sind in jeweils zwei solche Kreuzungen involviert, so dass sich für die zugehörige „Innenlänge“ eines inneren Brückengliedes ergibt:  $L := B - 2T$ . Die Innenlänge eines Randbrettes beträgt  $B - T = L + T$  (siehe Abb. 22 und 23).

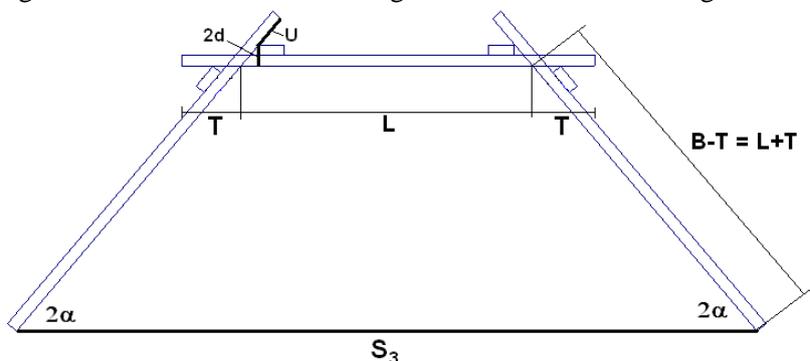


Abb. 22: Geometrie der Kreuzungen bei drei Brückengliedern

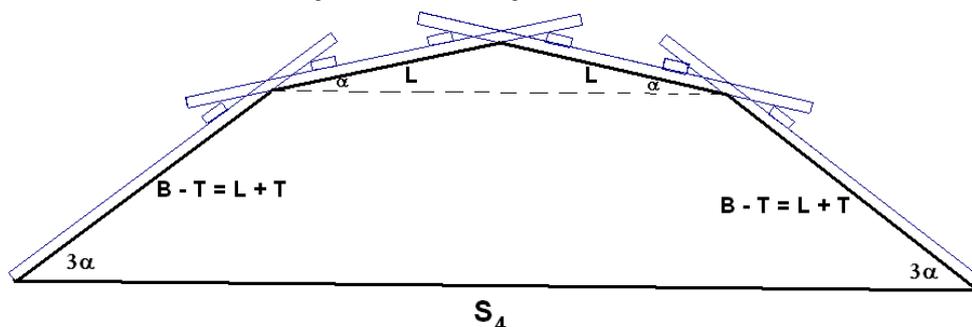


Abb. 23: Geometrie der Kreuzungen bei vier Brückengliedern

Für die zugehörigen Spannweiten ergibt sich

$$S_3(\alpha) = 2(B - T)\cos(2\alpha) + L \quad \text{bzw.} \quad S_4(\alpha) = 2[(B - T)\cos(3\alpha) + L\cos \alpha]$$

Als Fortsetzung ergäbe sich z. B.

$$S_5(\alpha) = 2[(B - T)\cos(4\alpha) + L\cos(2\alpha)] + L; \quad S_6(\alpha) = 2[(B - T)\cos(5\alpha) + L\cos(3\alpha) + L\cos\alpha]$$

Es ist wohl klar, wie diese Spannweiten  $S_n(\alpha)$  mit wachsendem  $n$  aufgebaut sind. Die äußersten beiden Brückenglieder haben eine Innenlänge von jeweils  $B - T = L + T$ , die anderen eine von  $L$ ; bei ungeradem  $n$  ist in der Mitte ein waagerechtes Brückenglied mit Innenlänge  $L$ . Alle anderen Innenlängen müssen für die Spannweite noch mit dem Kosinus des jeweiligen Steigungswinkels multipliziert werden (vgl. auch Abschnitt 5.3,  $x$ -Koordinaten der Leonardopunkte).

Für die zugehörige Optimierung sei stellvertretend der Graph von  $S_4(\alpha)$  mit  $B = 40$  cm,  $U = 10$  cm und  $d = 0,5$  cm abgebildet (Abb. 24). Man kann näherungsweise ablesen  $\alpha_{\text{opt}} \approx 0,18 \approx 10^\circ$ ; dies bedeutet für den optimalen Knickwinkel  $2\alpha_{\text{opt}} \approx 20^\circ$ . Natürlich könnte mit CAS auch die Gleichung  $S_4'(\alpha) = 0$  näherungsweise gelöst werden.

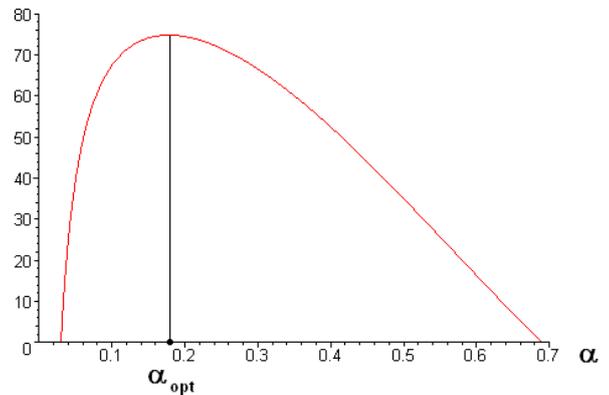


Abb. 24: Optimaler Winkel

### 6.3 Weitere Bauversionen

Es gibt auch noch einige *Abwandlungen* der gerade besprochenen Brückenform, die auf demselben *Prinzip* beruhen. Auch diese lohnen einer genaueren Betrachtung (Abb. 25).



Dies ist eine etwas andere Version als unsere: Abb. 25: Eine andere Bauversion

Vergleicht man sie mit Abb. 2, so ist zu sehen, dass in der Version von Abb. 25 gegenüber jener von Abb. 2 einfach einige Paare von „Stäben“ zu je *einem* Brettchen vereinigt wurden, sowohl in Längsrichtung (A und B, etc., so dass „innen“ nur ein „Längsstrang“ entsteht statt 2 inneren Längssträngen in Abb. 2) als auch in Querrichtung (C und D, E und F etc.); man spart dadurch natürlich Baumaterial ein.

**Bemerkung:** Genauso wäre es möglich, *nur* die Querstäbe zu vereinen (C und D, E und F etc. – siehe Abb. 26), oder *nur* die inneren „Längsstäbe“ paarweise zu vereinen (A und B, etc.).

Beim Bauen mit kleinen Latten gibt es prinzipielle Unterschiede zur obigen Version:

- Während der „Knickwinkel“  $2\alpha$  zwischen zwei aufeinander folgenden Brückengliedern und die „Baulänge“<sup>6</sup> bei der obigen Version steuerbar waren (vgl. Abschnitt 6.1), ist dieser hier durch die Ausmaße der Brettchen (Länge, Breite, Dicke) und durch die Bauweise schon fest vorgegeben (wenn man voraussetzt, dass je 2 aufeinander folgende Längsbrettchen genau über der Mitte eines Querbrettchens „zusammenstoßen“ sollen).



Abb. 26: Leonardobrücke in Freiburg i. B.

- Der Knickwinkel fällt bei dieser Version aber insgesamt deutlich kleiner aus ( $2\alpha \approx 14,5^\circ$  – siehe unten, statt  $2\alpha \approx 30^\circ$  – siehe oben), so dass die Brücke bei vielen Brückengliedern nicht so schnell sehr steil und damit für praktische Zwecke unbrauchbar wird (beide Versionen mit vielen Brückengliedern sollte man unbedingt nachbauen, so dass dies auch *erlebt* werden kann). Bei einer kleinen Zahl an Brückengliedern ist die obige Version vielleicht aber gerade in praktischer Hinsicht besser: stabiler, tragfähiger!

- Diese Brücke kann an einem Ende auch auf nur einem „Bein“ stehen, wie Abb. 27 von der Homepage des Mathematikums in Gießen zeigt; d. h. man kann hier an einem Ende auch „halbe Brückenglieder“ anbauen. Die Minimalversion dieser Bauweise besteht aus 1,5 Brückengliedern mit 5 Brettchen. Bei  $n$  „vollen Brückengliedern“ (jedes Ende steht auf 2 Beinen) benötigt man insgesamt  $5n - 2$  Brettchen (Aufgabe!).



Abb. 27: Mathematikum Gießen

- Bei dieser Version wird hier immer fast die ganze Länge der Brettchen als „Baulänge“ ausgenutzt, während bei der obigen Version deren Baulänge deutlich kürzer sein konnte als die zugehörige wirkliche Länge. Deswegen und wegen des deutlich kleineren Knickwinkels ist die Spannweite bei  $n$  Brückengliedern dieser Version größer als die Spannweite bei  $n$  Brückengliedern der obigen Version. Selbst wenn man einrechnet, dass man hier  $5n - 2$  Brettchen statt  $4n - 2$  gegenüber der obigen Version braucht, so ist die neue Version bezogen auf die Spannweite („Spannweite pro Brettchen“) deutlich zu bevorzugen.

- Welche Bauweise ist unter welchen Gesichtspunkten (Ökonomie, Sicherheit, Spannweite, Baumaterial, Belastung etc.) zu bevorzugen?

- Eine sehr interessante Version ist in Abb. 28 zu sehen: eine „zweidimensionale Leonardobrücke“, die eine Art Kuppel bildet, man kann sie sozusagen nicht nur in Richtung  $N \leftrightarrow S$ , sondern auch in Richtung  $W \leftrightarrow O$  überqueren. Es ist sicher nicht leicht eine solche Brücke aufzubauen, aber wenn man es (z. B. mit Stücken von Dachlatten) schafft, kann sie auch sehr stabil sein . . .



Abb. 28: Leonardobrücke – Kuppel (Uni Göttingen)

<sup>6</sup> Distanz zwischen den Auflagepunkten eines Brettchens an den jeweiligen Enden; kürzer als die Brettlänge selbst.

Eine weitere mögliche Aufgabe in diesem Zusammenhang könnte sein, den oben angesprochenen Knickwinkel für gegebene Werte von Länge, Breite und Dicke der Bretter zu bestimmen. Dieser Winkel kann und soll dann auch konkret im Modell nachgemessen werden! Alleine die *selbständige Anfertigung* einer schematischen Seitenansicht („Längsschnitt“ durch einen kurzen Brückenteil, vgl. Abb. 29) ist keine leichte Aufgabe; es ist dies aber eine ganz wesentliche Teilaufgabe, wofür unbedingt ein konkret gebautes Modell zur Verfügung stehen sollte.

Die Länge der Bretter sei  $B$ , ihre Breite  $b$  und ihre Dicke  $d$  (wir werden später die cm-Werte von oben nehmen:  $B = 40, b = 4, d = 0,5$ ), der „Knickwinkel“ ist wie oben  $2\alpha$ . Die Lösung der resultierenden Gleichung soll natürlich *näherungsweise* erfolgen (Gleichung 4. Grades, z. B. mit CAS), das Wichtige dabei ist das Anfertigen einer geeigneten Skizze, das *Aufstellen* dieser Gleichung, d. h. das *Erkennen* der wesentlichen Beziehungen und die Überprüfung des Winkels am realen Objekt.

In Abb. 29 ist für eine bessere Übersichtlichkeit eine Version mit einem sehr großen Knickwinkel gezeichnet.

Man kann daraus unmittelbar ablesen: Das Stück  $|AE| = \frac{B}{2}$  setzt sich zusammen aus:

$$|AB| = \frac{b}{2},$$

$$|BC| = \frac{2d}{\tan \alpha},$$

$$|CD| = \frac{2d}{\sin \alpha}, \quad |DE| = \frac{b}{2 \cos \alpha}.$$

$$\text{Daraus folgt } \frac{B}{2} = \frac{b}{2} + \frac{2d}{\tan \alpha} + \frac{2d}{\sin \alpha} + \frac{b}{2 \cos \alpha}. \quad (**)$$

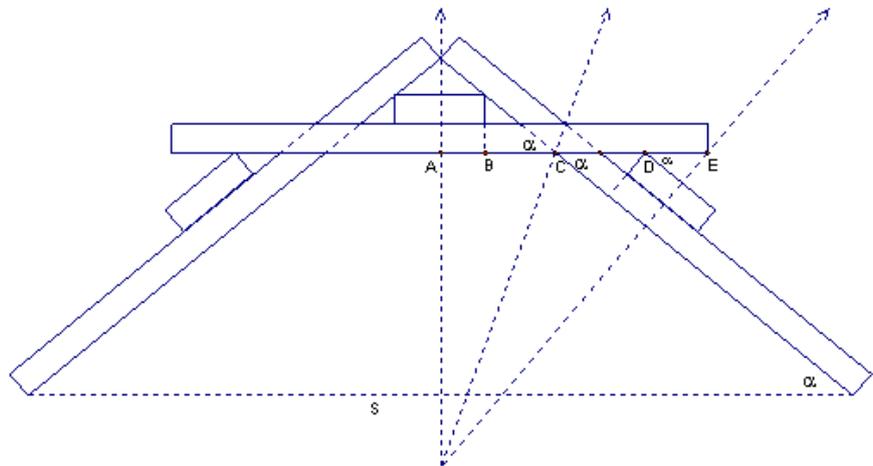


Abb. 29: Detaillierter Längsschnitt durch einen Knick

Diese Gleichung könnte zwar noch ein wenig weiter vereinfacht werden, aber eine geschlossene Auflösung nach  $\alpha$  gelingt ohnehin nicht ohne weiteres<sup>7</sup>. Aus dieser Gleichung kann bei konkreten Werten für  $b, d, B$  z. B. mit CAS der fragliche Winkel  $\alpha$  näherungsweise auf Knopfdruck bestimmt werden. Z. B. ergibt sich mit den obigen cm-Werten  $B = 40, b = 4, d = 0,5$  die Lösung  $\alpha \approx 7,2^\circ$ , und tatsächlich ist der Knickwinkel von  $2\alpha \approx 14 - 15^\circ$  am konkreten Objekt nachzumessen.

Die Spannweite  $S$  einer Brücke wie in Abb. 29 mit den gegebenen Maßen für  $b, d, B$  kann dann sowohl berechnet als auch im konkreten Modell nachgemessen werden:  $S = 2B \cos \alpha \approx 79,3$  cm.

Nach jeder anderen Variable ( $B, b, d$ ) lässt sich (\*\*) allerdings leicht auflösen, d. h. man kann z. B. leicht jene Länge  $B$  ausrechnen<sup>8</sup>, so dass sich z. B. bei  $b = 8$  cm und  $d = 1$  cm der „gewünschte“ Winkel  $\alpha = 10^\circ$  ergibt (Lösung:  $B \approx 61,8$  cm).

<sup>7</sup> Man könnte eine Gleichung 4. Grades in  $\sin \alpha$  erreichen.

<sup>8</sup> Zur Beantwortung der Frage: Auf welche Länge muss man entsprechende Leisten aus dem Baumarkt zuschneiden lassen?

## Literatur

- BLUM, W., P. GALBRAITH, H.-W. HENN u. M. NISS (2007): *Modelling and Applications in Mathematics Education*. Springer, New York.
- BORNELEIT, P; R. DANCKWERTS; H.-W. HENN; H.-G. WEIGAND (2001): *Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe*. In: *JMD* **22**, 1, 73 – 90.
- BÜRGER, W. (1995): *Die Leonardobrücke*. Aus: *Der paradoxe Eierkocher – Physikalische Spielereien aus Professor Bürgers Kabinett* (S. 89 – 95). Birkhäuser, Basel.
- GALE, D. (1990): *Proof as Explanation*. In: *Mathematical Intelligencer* **12**, 1, 4.
- HANNA, G. (1989): *Proofs that prove and proofs that explain*. – In: *Thirteenth International Conference of the International Group on Psychology of Mathematics Education, Proceedings Vol. 2*, 45 – 51.
- HEFENDEHL-HEBEKER, L. (2000): *Struktur und Genese mathematischen Wissens als Leitlinie für den Unterricht*. In: *Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, Heft 31, 5 – 27.
- HENN, H.-W. (1997): *Realitätsnaher Mathematikunterricht mit DERIVE*. Dümmler, Bonn.
- HENN, H.-W. (2000): *Analysisunterricht im Aufbruch*. In: *MU* **46**, 4/5, 26 – 45.
- HENN, H.-W. (Hrsg., 2002): *Themenheft „Modellieren“*. *mathematik lehren* 113.
- HENN, H.-W. u. K. MAAß (Hrsg., 2003): *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*. ISTRON-Band 8. Franzbecker, Hildesheim.
- MAAß, K. (2007): *Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe 1*. Cornelsen, Berlin.
- VOLLRATH, H. J. (1978): *Rettet die Ideen!* In: *MNU* **31**, 449 – 455.
- WAGENSCHNIG, M. (1977): *Rettet die Phänomene!* In: *MNU* **30**, 129 – 137.
- WHITEHEAD, A. N. (1962): *The Aims of Education*. Nachdruck von 1932. Ernest Benn, London.
- WINTER, H. (1975): *Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht?* In: *ZDM* **7**, 3, 106 – 116.
- WINTER, H. (1984): *Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht*. In: *mathematik lehren* 2 (Februar 1984), 4 – 16.
- WINTER, H. (2003): *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*. In: HENN, H.-W. u. K. MAAß (Hrsg., 2003), 6 – 15.
- WITTMANN, E. Ch. (1995): *Mathematics Education as a "Design Science"*. In: *Educational studies in Mathematics* **29**, 355 – 374.
- WITTMANN, E. Ch. (2001): *Rettet die Phänomene!* Aus: SELTER, CH. u. G. WALTER (Hrsg., 2001): *Mathematik lernen und gesunder Menschenverstand*. Festschrift für G. N. Müller. Klett, Leipzig u. a., 222 – 242.

## Verfasser

Hans HUMENBERGER  
Universität Wien  
Fakultät für Mathematik  
Nordbergstraße 15  
A – 1090 Wien  
hans.humenberger@univie.ac.at